Le Processus Autorégressif d'Arrondi d'Ordre p (RINAR(p))

Maher Kachour

Le Processus Autorégressif d'Arrondi d'Ordre p (RINAR(p)).

M. Kachour
IRMAR, Université de Rennes 1, France.

UMR 6626/ Université Rennes 1
campus scientifique de Beaulieu
263 Avenue de Général Leclerc
35042 RENNES CEDEX
Email :
maher.kachour@univ-rennes1.fr
Tel :
00.33.(0)2.23.23.63.98

Résumé : Nous présentons le processus **RINAR(p)** pour modèliser des séries temporelles à valeurs entières. Le **RINAR(p)** est basé sur l'opérateur arrondi. Comparé aux modèles **INAR(p)** bien connus dans la littérature, le nouveau modèle possède plusieurs avantages : une simple structure d'innovation, des coefficients autorégressifs avec des signes arbitraires, des possibles valeurs négatives pour les séries chronologiques, des possibles valeurs négatives pour les fonctions d'autocorrélation. Nous donnons les conditions de stationnarité et d'ergodicité du modèle. Pour l'estimation des paramètres, nous considérons l'estimateur des moindres carrés et nous montrons sa consistance forte sous des conditions convenables d'identifiabilité.

Abstract : An extension of the **RINAR(1)** process for modelling discrete-time dependent counting processes is considered. Compared to classical **INAR(p)** models based on the thinning operator, the new models have several advantages : simple innovation structure ; autoregressive coefficients with arbitrary signs ; possible negative values for time series ; possible negative values for the autocorrelation function. The conditions for the stationarity and ergodicity, of the **RINAR(p)** model, are given. For parameter estimation, we consider the least squares estimator and we prove its consistency under suitable identifiability condition.

Mots-clés : Séries temporelles à valeurs entières, les modèles INAR, l'opérateur arrondi, le modèle RINAR(p), l'estimateur des moindres carrés, la consistance forte.

1 Introduction

Les séries chronologiques à valeurs entières sont fréquentes dans la pratique. Avant la fin des années 80 de telles observations étaient traitées par des modèles réels (e.g. **ARMA**, **VAR**, **ARCH**,...) bien connus dans la littérature, sans tenir compte de la nature entière de ces observations. Plus tard, des auteurs tel McKenzie [5] and Al-osh & Alzaid [1] ont introduit des classes de modèle qui possèdent les mêmes propriétés que des modèles réels en respectant la nature des observations. En particulier, nous présentons la classe **INAR**. Ces modèles sont inspirés de la dynamique de population et sont basés sur l'opérateur binomial d'amincissement, noté $\circ$.

Un processus **INAR(p)** est défini par

$$X_t = a_1 \circ X_{t-1} + a_2 \circ X_{t-2} + \ldots + a_p \circ X_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \forall\, t \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

où, pour $i = 1, \ldots, p$,

$$a_i \circ X_{t-i} = \sum_{k=1}^{X_{t-i}} \xi_{ik}.$$

Ici, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ and $k \in \mathbb{N}^*$, la série de comptage (ξ_{ik}) est une suite i.i.d. de variables aléatoires de Bernoulli avec une probabilité de succès a_i. Par suite, $a_i \circ X_{t-i}$ est une variable Binomiale ayant a_i et X_{t-i} comme paramètres, $a_i \circ X_{t-i} \rightsquigarrow B(X_{t-i}, a_i)$.
Ainsi, (ε_t) est une suite i.i.d. de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendante de toute les séries de comptage.

Nous distinguons deux spécifications différentes. Chaque spécification dépend des séries de comptage choisies. Le modèle **INAR(p)-AA** est introduit par Al-osh & Alzaid [1] où sa structure d'autocorrélation correspond à celle d'un modèle **ARMA(p, p-1)** réel. Du & Li [2] (1991) ont proposé un modèle, noté **INAR(p)-DL**, où sa structure d'autocorrélation est la même qu'un **AR(p)** réel.

Les modèles **INAR(p)** ont plusieurs limites. Leur structure d'innovation est complexe, dépendant non seulement du bruit (ε_t), mais également des variables de comptage (ξ_{ik}), $i = 1, \ldots, p$. Les coefficients autorégressifs sont limités à l'intervalle $[0, 1]$. Dans le cas d'un modèle **INAR(1)** par exemple, cette restriction exclut les autocorrélations négatives.

Nous introduisons le modèle suivant

$$X_t = \langle \sum_{j=1}^{p} \alpha_j X_{t-j} + \lambda \rangle + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

où $\langle x \rangle$ est la valeur arrondie d'un réel x au nombre entier le plus proche et (ε_t) est une suite i.i.d. de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telle que $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$. Ce modèle est appelé **RINAR(p)**.

Ce modèle possède de nombreux avantages. Sa structure d'innovation est simple, générée uniquement par le bruit (ε_t). Sa prévision à un pas est donnée par

$$\hat{X}_{T+1} = \mathbb{E}\left(X_{T+1} \mid X_s, s \le T\right) = \langle \sum_{j=1}^{p} \alpha_j X_{T+1-j} + \lambda \rangle, \tag{3}$$

qui est une valeur entière par construction du modèle. Nous verrons également que le modèle **RINAR(p)** peut produire des autocorrélations aussi riches que celles d'un **AR(p)** réel, y compris les autocorrélations négatives. D'ailleurs, par construction **RINAR(p)** peut analyser des séries chronologiques avec des valeurs négatives, une situation qui n'est couverte par aucun modèle **INAR**.

Le modèle **RINAR(p)** est une généralisation directe du modèle **RINAR(1)** introduit par Kachour & Yao [4]. À la suite, nous étudions les propriétés du modèle en particulier la stationnarité et l'ergodicité. Dans le cadre de l'estimation des paramètres nous proposons l'estimateur des moindres carrés. À cause de l'opérateur $\langle \cdot \rangle$, l'identifiabilité du modèle a un comportement non-standard. Ainsi, comme pour le **RINAR(1)**, nous distinguons deux cas dépendant de la nature des α_j^*, les vraies valeurs des paramètres α_j du modèle **RINAR(p)**. Finalement, nous montrons la consistance forte de l'estimateur des moindres carrés pour les deux cas.

2 La stationnarité et l'ergodicité

Étudier le processus **RINAR**(p) revient à étudier le processus vectoriel suivant

$$Y_t = \begin{pmatrix} X_t \\ X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \sum_{j=1}^{p} \alpha_j X_{t-j} + \lambda \rangle + \varepsilon_t \\ X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-p+1} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Le processus (Y_t) forme une chaîne de Markov homogène avec $E = \mathbb{Z}^p$ comme espace d'état et une probabilité de transition définie par

$$\pi(x,y) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 = y_1 - \langle \sum_{j=1}^p \alpha_j x_j + \lambda \rangle) \; 1\!\!1_{\{y_2=x_1,\ldots,y_p=x_{p-1}\}} \;, \; \forall \; x=(x_j), y=(y_j) \in E. \tag{5}$$

Nous rappelons, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_p|$.

Proposition 1. *Supposons que :*

1. (Y_t) *est une chaîne de Markov irréductible ;*
2. *pour un certain* $k > 1$, $\mathbb{E}[|\varepsilon_t|^k] < +\infty$ *;*
3. $\sum_{j=1}^p |\alpha_j| < 1$.

Alors

1. *Le processus* (Y_t) *a une unique mesure de probabilité invariante* μ *qui possède un moment d'ordre* k *(i.e.* $\mu(\|.\|_1^k) < \infty$*).*
2. *Pour tout* $y \in E$ *et* $f \in L^1(\mu)$ *on a*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(Y_k) \longrightarrow \mu(f), \qquad \mathbb{P}_y \; a.s.$$

où $\mathbb{P}_y$ *représente la probabilité conditionnelle* $\mathbb{P}(. \mid Y_0 = y)$.

3 L'estimation des paramètres

Soit $\theta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \lambda) \in \mathbb{R}^{p+1}$. Dans cette section, nous supposons que θ appartient à un espace de paramètres Θ sous-ensembe compact de $]-1,1[^p \times \mathbb{R}$. Nous notons

$$f(x;\theta) = f(x_1, \ldots, x_p; \theta) = \langle \sum_{j=1}^p \alpha_j x_j + \lambda \rangle.$$

Soit $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, on définit l'arrondi du vecteur x par $\langle x \rangle = (\langle x_1 \rangle, \ldots, \langle x_p \rangle)$.
Ensuite, le modèle **RINAR**(p) peut être écrit sous la forme suivante

$$Y_t = \begin{pmatrix} f(Y_{t-1};\theta) \\ X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-p+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \langle M Y_{t-1} + \xi \rangle + \eta_t = F(Y_{t-1};\theta) + \eta_t,$$

où

$$\theta = (M, \xi) \text{ avec } M = \begin{pmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_p \\ I_{p-1} \quad 0 \end{pmatrix}, \; \xi = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; F(y;\theta) = \langle My + \xi \rangle, \; \forall \; y \in E \text{ et } \eta_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soient $X_{-p+1}, \ldots, X_0, \ldots, X_n$ des observations du processus **RINAR(p)**. Pour l'estimation du paramètre θ, nous considérons l'estimateur des moindres carrés défini par

$$\hat{\theta}_n := \arg\min_{\theta \in \Theta} \varphi_n(\theta), \tag{6}$$

où

$$\varphi_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(X_t - f(Y_{t-1};\theta)\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(\|Y_t - F(Y_{t-1};\theta)\|_1)^2. \tag{7}$$

Quelques notations et remarques sont nécessaires. Nous notons $\theta_0 = (\alpha_1^*, \ldots, \alpha_p^*, \lambda^*)$ la vraie valeur des paramètres du modèle et $\mathbb{P}_{\theta_0}$ représente la distribution de probabilité sous θ_0.
Par la suite, nous supposons que, sous $\mathbb{P}_{\theta_0}$, les hypothèses suivantes sont vérifiées :
(Y_t) est irréductible ; $\mathbb{E}[|\varepsilon_t|^k] < +\infty$ où $k \geq 2$; $\sum_{j=1}^{p}|\alpha_j^*| < 1$ et Θ est compact.

Avant d'examiner l'identifiabilité du **RINAR(p)**, nous rappelons les résultats obtenus concernant ce problème pour le **RINAR(1)** [4]. Soit α_0 et λ_0 les vraies valeurs des paramètres du modèle **RINAR(1)**. À cause de l'opérateur $\langle\cdot\rangle$, nous distinguons deux cas :
Si $\alpha_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, alors pour tout $\theta \in \Theta$ nous avons

$$\langle \alpha x + \lambda\rangle = \langle \alpha_0 x + \lambda_0\rangle, \ \forall\ x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \alpha_0 \text{ et } \lambda = \lambda_0. \tag{8}$$

Si $\alpha_0 = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et p and q sont premiers entre eux, alors pour tout $\theta \in \Theta$ nous obtenons

$$\langle \alpha x + \lambda\rangle = \langle \alpha_0 x + \lambda_0\rangle, \ \forall\ x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \alpha_0 \text{ et } \lambda \in I_0. \tag{9}$$

Ici, I_0 est un intervalle contenant λ_0 et de taille $\frac{1}{q}$ ou $\frac{1}{2q}$.

Revenons au modèle **RINAR(p)**, nous distinguons aussi deux cas :
Si un au moins des α_j^* est irrationnel, alors il est simple de vérifier que l'équivalent de l'équation (8), pour un ordre $p > 1$, reste valable. Ainsi, pour ce cas nous donnons le théorème suivant [3].

Théorèm 1. *S'il existe $j \in \{1, \ldots, p\}$ tel que α_j^* est un nombre irrationnel. Alors l'estimateur des moindres carrés est fortement consistant, i.e.*

$$\hat{\theta}_n \to \theta_0, \quad \mathbb{P}_{\theta_0} - a.s.$$

Maintenant, nous supposons que, pour tout $j = 1, \ldots, p$, $\alpha_j^* = \frac{a_j}{b_j}$ où $a_j \in \mathbb{Z}$, $b_j \in \mathbb{N}^*$ et a_j and b_j sont premiers entre eux. Pour fixer les idées nous considérons le modèle **RINAR(2)**. Notre but est de montrer que l'étude du problème d'identifiabilité du **RINAR(2)** est équivalente à celle d'un **RINAR(1)** où α_0 est irrationnel. Soit $y = (x_1, x_2) \in E = \mathbb{Z}^2$. Donc,

$$\alpha_1^* x_1 + \alpha_2^* x_2 = \frac{1}{b_1 b_2}\left(a_1 b_2 x_1 + a_2 b_1 x_2\right). \tag{10}$$

D'après le théorème de Bézout, nous avons

$$a_1 b_2 \mathbb{Z} + a_2 b_1 \mathbb{Z} = d\mathbb{Z}, \quad \text{où} \quad d = a_1 b_2 \wedge a_2 b_1. \tag{11}$$

Alors il existe $x \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\alpha_1^* x_1 + \alpha_2^* x_2 = \alpha_0 x, \quad \text{où} \quad \alpha_0 = \frac{d}{b_1 b_2}. \tag{12}$$

Dans le but de rester fidèle à nos notations, nous récrivons α_0 sous forme de fraction irréductible

$$\alpha_0 = \frac{d}{b_1 b_2} = \frac{a}{b}, \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad a \wedge b = 1. \tag{13}$$

Finalement, nous donnons le théorème suivant concernant ce cas [3].

Théorèm 2. *Si, pour $j = 1, 2$, $\alpha_j^* = \frac{a_j}{b_j}$ où $a_j \in \mathbb{Z}$, $b_j \in \mathbb{N}^*$ et $a_j \wedge b_j = 1$. Alors $\hat{\alpha}_n$ est fortement consistant tandis que $\hat{\lambda}_n$ converge vers un intervalle I_0^* contenant λ^* et de taille $\frac{1}{b}$ ou $\frac{1}{2b}$.*

Références

[1] A. A. Alzaid and M. Al-Osh. First-order integer-valued autoregressive (INAR(1)) process. J. Time Ser. Anal., 8(3) :261–275, 1987.

[2] J.-G. Du and Y. Li. The integer-valued autoregressive (INAR(p)) model. J. Times Ser. Anal., 12 :129–142, 1991.

[3] M. Kachour. p-order rounded integer-valued autoregressive (RINAR(p)) process. Preprint, University of Rennes 1, 2008-2009.

[4] M. Kachour and J.F. Yao. First-order rounded integer-valued autoregressive (RINAR(1)) process. Preprint, University of Rennes 1, 2008.

[5] E. McKenzie. Some simple models for discrete variate time series. Water Resources Bulletin, 21(4) :645–650, 1985.